

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
Τομές Άλγεβρας και Γεωμετρίας  
Μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία  
Διδάσκων: Βλάχος Θεόδωρος  
Ιανουάριος 2020

**Θέμα 1**

- (i) Θεωρούμε την καμπύλη  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε,  $c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μήκους τόξου με αφητηρία το  $t_0 = 0$ , να δείξετε ότι η καμπύλη  $c$  είναι κανονική, να υπολογίσετε την καμπυλότητα και τη στρέψη αυτής ως συνάρτηση του  $t$ , αλλά και του μήκους τόξου  $s$  και τέλος, να αποδείξετε ότι είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης. (ΜΟΡΙΑ 20)
- (ii) Δίνεται η καμπύλη  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  με φυσική παράμετρο  $s \in I$  και καμπυλότητα  $k(s) > 0$ , για κάθε  $s \in I$ . Υποθέτουμε ότι οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $c(s)$  και είναι παράλληλες προς το διάνυσμα  $\vec{n}(s) + \vec{b}(s)$  (όπου  $\vec{n}(s)$ ,  $\vec{b}(s)$  είναι το κύριο και το δευτερέον κάθετο της εν λόγω καμπύλης, αντιστοίχα) τέμνονται για κάθε  $s \in I$  σε σταθερό σημείο  $p_0$ . Να αποδείξετε ότι η καμπύλη  $c$  είναι κύκλος. (ΜΟΡΙΑ 10)

**Θέμα 2**

Δίνεται το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \sin z = y \cos z\}$$

- (i) Αποδείξτε ότι το  $S$  είναι κανονική επιφάνεια. (ΜΟΡΙΑ 05)
- (ii) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση  $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της  $S$ . (ΜΟΡΙΑ 10)
- (iii) Να βρείτε την απεικόνιση Gauss της  $S$  και να εξετάσετε αν είναι 1-1. (ΜΟΡΙΑ 10)
- (iv) Να βρείτε τις ασυμπτωτικές καμπύλες της  $S$  και να τις χαρακτηρίσετε γεωμετρικά. (ΜΟΡΙΑ 10)
- (iv) Αποδείξτε ότι η  $S$  είναι ευθυσιογενής. Είναι αναπτυκτική; (ΜΟΡΙΑ 10)
- (iv) Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες της  $S$ . (ΜΟΡΙΑ 05)

**Θέμα 3**

Δίνεται μία κανονική παραμετρική επιφάνεια  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  με μοναδιαίο κάθετο  $N(u, v)$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $(u, v) \in U$

$$N_u(u, v) = \lambda X_u(u, v) \text{ και } N_v(u, v) = 0,$$

όπου  $\lambda \neq 0$  σταθερά.

- (i) Αποδείξτε ότι  $F = 0$  και να βρείτε την καμπυλότητα Gauss της  $X$ . (ΜΟΡΙΑ 05)
- (ii) Αποδείξτε ότι το  $X_v$  είναι σταθερό κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης  $c(u) = X(u, v_0)$ , όπου  $v_0 = \text{σταθερό}$ . (ΜΟΡΙΑ 05)
- (iii) Αποδείξτε ότι η καμπύλη  $c(u)$  είναι επίπεδη. (ΜΟΡΙΑ 05)

(iv) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση  $N(u, v) - \lambda X(u, v)$  είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου  $u$  και εν συνεχεία ότι η παραμετρική καμπύλη  $c(u)$  είναι κύκλος. (ΜΟΡΙΑ 05)

- Απαντήσεις οι οποίες δεν είναι τεκμηριωμένες δεν λαμβάνονται υπόψιν.
- Σοβαρά μαθηματικά λάθη θα επηρεάσουν αρνητικά τη βαθμολογία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Onlymaths και Φροντιστήριο π